CLASE 5. El Teorema de Green

Enunciaremos el teorema de Green primero para un tipo especial de región $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$ que llamaremos *simple* y luego se extenderá a regiones más generales que se puedan descomponer en regiones de este tipo especial (o de *regiones elementales de tipo 3* o *simétricas*, como en el curso de matemáticas V).

Definición 5.1 (Región Simple)**.** Se dice que una región $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^2$ es simple si cualquier línea paralela a uno de los ejes coordenados cruza la frontera $\partial\mathcal{R}$ de $\mathcal{R}$ a lo sumo en dos puntos. Se permite que tal línea coincida con la frontera en un cierto intervalo.

Teorema 5.2 (Teorema de Green para regiones simples)**.** *Sea $\mathcal{R}$ una región acotada, cerrada y simple en $\mathbb{R}^2$. Sea $\partial\mathcal{R}$ la curva frontera, suave a trozos, que encierra (acota) a $\mathcal{R}$, orientada de manera que un observador, moviéndose a lo largo de la curva $\partial\mathcal{R}$, note que $\mathcal{R}$ le quede a su izquierda (y si la región es interior a la curva frontera, la orientación sería la contraria al movimiento de las manecillas del reloj). A la orientación anterior la llamaremos, simplemente,* orientación positiva*. Consideremos un campo vectorial $\mathbf{F} = (P, Q)$ de clase C^1, $P : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $Q : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_{\partial\mathcal{R}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

***Observación* 5.3.** El teorema también es válido tomando a $\mathcal{R}$ como *región elemental de tipo 3* o *simétrica* (en vez de simple), en la terminología de matemáticas V.

Teorema 5.4 (Teorema de Green para regiones más generales)**.** *Sea $\mathcal{R}$ una región cerrada y acotada en $\mathbb{R}^2$. Sea $\partial\mathcal{R}$ la curva frontera, suave a trozos, que acota a $\mathcal{R}$ orientada positivamente (término definido en el Teorema 5.2) y sea $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial de clase C^1 en $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{R}$ se puede descomponer en un número finito de regiones simples (ó de tipo 3, como en matemáticas 5), entonces se cumple que*

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

***Corolario* 5.5.** Si la curva frontera $\partial\mathcal{R}$ está formada por una curva (cerrada) externa C y N curvas cerradas interiores $C_1,\ C_2, \ldots, C_N$, todas orientadas en sentido anti-horario entonces la fórmula de Green se expresaría como

$$\int_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} - \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} - \cdots - \int_{C_N} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint\limits_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Teorema 5.6. *Sea $\partial\mathcal{R}$ la curva frontera cerrada simple, orientada positivamente (como en el Teorema 5.2), que acota una región $\mathcal{R}$ en la cual es válido el teorema de Green. Entonces el área de $\mathcal{R}$ es*

$$\mathrm{Area}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{R}} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Prueba. La demostración se obtiene aplicando el teorema de Green, siendo $P(x,y) = -y$ y $Q(x,y) = x$. Así

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{R}} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{R}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathcal{R}} (1-(-1))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{R}} \mathrm{d}A = \mathrm{Area}(\mathcal{R}).\end{aligned}$$

□

Usando el lenguaje de campos vectoriales podemos escribir el teorema de Green de la forma siguiente:

Teorema 5.7 (Forma vectorial de Green: Stokes)**.** *Sea $\mathcal{D}$ una región en $\mathbb{R}^2$ simple (o simétrica o de tipo 3) y sea $\partial\mathcal{D}$ su frontera, orientada positivamente. Sea $\mathbf{F} = (P,Q)$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ en $\mathcal{D}$. Entonces*

$$\int\limits_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \mathrm{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\ \mathrm{d}A,$$

donde $\mathrm{rot}(\mathbf{F})$ *se interpreta no como el rotacional del campo (P,Q) (lo cual no tendría sentido puesto que el rotacional no fue definido para campos en $\mathbb{R}^2$) sino de $(P,Q,0)$ y $\mathbf{k} = (0,0,1)$.*

Al calcular $\mathrm{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}$ se obtiene que $\mathrm{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = Q_x - P_y$. Aplicando Green será

$$\int\limits_{\partial\mathcal{D}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = \iint\limits_{\mathcal{D}} \mathrm{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,\mathrm{d}A.$$

Teorema 5.8 (Divergencia en el plano)**.** *Sea $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2$ una región simple (o también se puede puede tomar simétrica o de tipo 3, en la terminología de matemáticas 5) y sea $\partial\mathcal{D}$ su frontera, orientada positivamente (recuerde su definición en el Teorema 5.2), parametrizada por, digamos, una función*

$\sigma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$. Sea $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1$ definido en $\mathcal{D}$ y si $\boldsymbol{\eta}$ denota la normal unitaria exterior (positiva) a $\partial\mathcal{D}$, entonces

$$\int\limits_{\partial\mathcal{D}} (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{dA}.$$

Prueba. El vector $\boldsymbol{\eta}$ está dado por

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}(y'(t)\,,\,-x'(t)).$$

Es claro que $\boldsymbol{\eta}\cdot\sigma' = 0$, así que $\boldsymbol{\eta}$ es normal a la frontera. Usando la definición de integral de trayectoria

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\mathcal{D}} (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}\sigma &= \int_a^b \frac{P(x(t),y(t))\,y'(t) - Q(x(t),y(t))\,x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}}\sqrt{x'(t)^2\,y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b P(x(t),y(t))\,y'(t) - Q(x(t),y(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{\partial\mathcal{D}} P\,\mathrm{d}y - Q\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\mathcal{D}} -Q\,\mathrm{d}x + P\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\mathcal{D}} [P_x - (-Q_y)]\,\mathrm{dA} \\
&= \iint\limits_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{dA}.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.9. Consideremos la función $\mathbf{F}(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\,,\,\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ y una curva cerrada simple C, orientada positivamente, que encierra al origen. Pruebe que $\displaystyle\int\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 2\pi$.

Solución. Como $\mathbf{F}$ no es $\mathcal{C}^1$ ($\mathbf{F}$ no está definida en el origen) no se puede aplicar el teorema de Green; sin embargo, escogiendo una circunferencia C_1 orientada positivamente, de centro el origen y con radio r suficientemente pequeño de manera que C_1 esté contenida en la región encerrada por C, podemos aplicar el teorema generalizado de Green en la región $\mathcal{D}$ encerrada por las curvas C y C_1 (ver Figura 1), obteniendo, conforme al Corolario 5.5,

$$\int\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} - \int\limits_{C_1} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

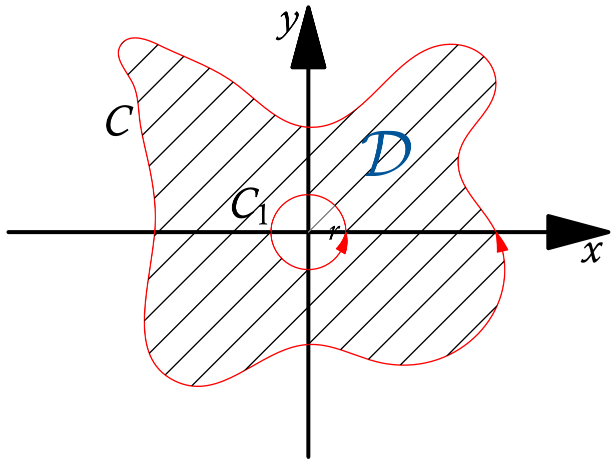

Figura 1: Teorema de Green en regiones de tipo anillo.

De $P = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ se obtiene que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, luego $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$.

Parametrizando C_1 con $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$, resulta $x'(t) = -r\operatorname{sen} t$, $y'(t) = r\cos t$, con lo cual $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{2\pi} \frac{(-r\operatorname{sen} t)(-r\operatorname{sen} t) + (r\cos t)(r\cos t)}{r^2}\, dt$ y así

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Nótese que el valor de la integral no depende de la curva.

Ejemplo 5.10. Sean $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2y^2 - \operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(y^2) + 2y^2\cos(1+y^2) + 2x^3y)$ y la curva C (orientada en sentido anti-horario) definida por

$$C = \{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 = 1, y \le 0\} \cup \{(x,y) : x^2+y^2 = 9, y \ge 0\} \cup \{(x,0) : -3 \le x \le 0\}.$$

Usando el teorema de Green, calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$.

Solución. $\mathbf{F}$ es $\mathcal{C}^1$, para aplicar el teorema de Green cerramos la curva con el segmento $\sigma_4 = \{(x,0) : 0 \le x \le 1\}$, orientado de izquierda a derecha (ver Figura 2). Así $C \cup \sigma_4$ es la frontera de una región $\mathcal{D}$ a la cual se le puede aplicar el teorema de Green, obteniendo

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{\sigma_4} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_{\mathcal{D}} (Q_x - P_y)\, dA.$$

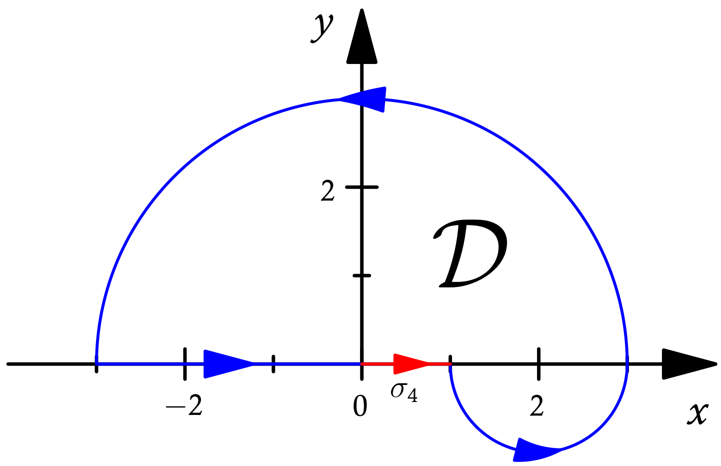

Figura 2: Cerrando la curva para aplicar Green.

Al calcular $Q_x = 6x^2y$ y $P_y = 6x^2y$, notamos que $Q_x - P_y = 0$, por lo cual $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} (Q_x - P_y)\,\mathrm{dA} = 0$.

Parametrizando σ_4, $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, $\begin{cases} \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = 0 \end{cases}$. Así,
$\displaystyle\int_{\sigma_4} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_0^1 -\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t = \cos(1) - 1.$

Sustituyendo, obtenemos

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = -\int_{\sigma_4} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = 1 - \cos(1).$$